数学実力テストサンプル

3年＿＿＿組＿＿＿番　名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$　次の式を計算しなさい。

【解答例】

(1)　$(x-2)^2+3x-1$

$=x^2-4x+4+3x-1$

$=x^2-x+3$

(2)　$3ab^2\times 2a^4b^3\div 5a^2b$

$=\dfrac{3\times 2}{5}\cdot\dfrac{a\cdot a^4\cdot b^2\cdot b^3}{a^2\cdot b}$

$=\dfrac{6}{5}a^3b^4$

(3)　$(x+2)(x-2)(x+3)(x+7)$

$=(x+2)(x+3)(x-2)(x+7)$

$=\left(x^2+5x+6\right)\left(x^2+5x-14\right)$

$X=x^2+5x$ とおくと

与式 $=(X+6)(X-14)$

$=X^2-8X-84$

$=\left(x^2+5x\right)^2-8\left(x^2+5x\right)-84$

$=x^4+10x^3+25x^2-8x^2-40x-84$

$=x^4+10x^3+17x^2-40x-84$

(4)　$|x-3|-|x+7|$

(i)　$3\leqq x$ のとき、

与式 $=(x-3)-(x+7)=-10$

(ii)　$-7\leqq x\leqq 3$ のとき、

与式 $=-(x-3)-(x+7)=-2x-4$

(iii)　$x\leqq -7$ のとき、

与式 $=-(x-3)+(x+7)=10$

(5)　$\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{7-\sqrt{5}}$

$=\sqrt{3}-1+\sqrt{\dfrac{14-2\sqrt{5}}{2}}$

$=\sqrt{3}-1+\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$=\sqrt{3}-1+\dfrac{\sqrt{14}}{2}-1$

$=\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{14}}{2}-2$

$\boxed{2}$　$a_3=12, a_7=192$ であるような等比数列 $\{a_n\}$ について

ただし、$a_n>0$ である。

(1)　a_{10} を求めよ。

(2)　一般項 a_n を求めよ。

(3)　$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ を求めよ。

【解答例】

(1)　$a_3=12, a_7=192$ より、

初項 a、公比を r とおくと

$ar^2=12,\quad ar^6=192$ となる。

$r^4=16$ より、$a_n>0$ なので、$r=2$

$a_{10}=ar^9$

$=ar^6\times r^3$

$=192\times 8$

$=1536$

(2)　公比 $r=2$ より、$ar^2=12$ から、初項 $a=3$

したがって、一般項 $a_n=3\cdot 2^{n-1}$

(3)　初項 3、公比 2 の等比数列の和なので

$S_n=3\cdot\dfrac{2^n-1}{2-1}$

$=3\left(2^n-1\right)$

数学実力テストサンプル

3年＿＿＿組＿＿＿番　名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{3}$　$y(\theta) = -2\left(\sin^3\theta - \cos^3\theta\right) + (\sin\theta - \cos\theta) + \sin 2\theta - 1$

ただし、　$\left(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$

(1)　$t = \sin\theta - \cos\theta$ とする時、t のとる値の範囲を求めよ。

(2)　$t = \sin\theta - \cos\theta$ とおいた式 $y(t)$ を求めよ。

(3)　$y(\theta) < 0$ の時の θ の範囲を求めよ。

【解答例】

(1)　$t = \sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$　　（合成の公式より）

$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ より、$-\frac{3}{4}\pi \leqq \theta - \frac{\pi}{4} \leqq \frac{\pi}{4}$

よって、$-1 \leqq \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\quad -\sqrt{2} \leqq t \leqq 1$

(2)　$y(\theta) = -2\left(\sin^3\theta - \cos^3\theta\right) + (\sin\theta - \cos\theta) + \sin 2\theta - 1$

$= -2\sin^3\theta + 2\cos^3\theta + \sin\theta - \cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta - 1$

ここで、$t^3 = (\sin\theta - \cos\theta)^3$

$= \sin^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta + 3\sin\theta\cos^2\theta - \cos^3\theta$

$= \sin^3\theta - 3\left(1 - \cos^2\theta\right)\cos\theta + 3\sin\theta\left(1 - \sin^2\theta\right) - \cos^3\theta$

$= \sin^3\theta - 3\sin^3\theta - \cos^3\theta + 3\cos^3\theta - 3\cos\theta + 3\sin\theta$

$= -2\sin^3\theta + 2\cos^3\theta + 3(\sin\theta - \cos\theta)$

$t^2 = (\sin\theta - \cos\theta)^2$

$= \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$

$= 1 - 2\sin\theta\cos\theta$

よって、$y = t^3 - t^2 - 2(\sin\theta - \cos\theta)$

$\therefore\quad y(t) = t^3 - t^2 - 2t$

(3)　$y(\theta) < 0$ のとき、$y(t) < 0$

よって、$t^3 - t^2 - 2t < 0$

$t\left(t^2 - t - 2\right) < 0$

$t(t-2)(t+1) < 0$ より、

$t < -1, 0 < t < 2$

このとき、$-\sqrt{2} \leqq t \leqq 1$ より、$y(t) < 0$ を満たすのは、

(i)　$-\sqrt{2} \leqq t < -1$ または、

$-\sqrt{2} \leqq \sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) < -1$

$-1 \leqq \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) < -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii)　$0 < t \leqq 1$ のとき、よって

$0 < \sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$

$0 < \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$

ここで、$-\frac{3}{4}\pi \leqq \theta - \frac{\pi}{4} \leqq \frac{\pi}{4}$ より

$-\frac{3}{4}\pi < \theta - \frac{\pi}{4} < -\frac{\pi}{4}$　　　　$0 < \theta - \frac{\pi}{4} \leqq \frac{\pi}{4}$

したがって、

$-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$　　　　$\frac{\pi}{4} < \theta \leqq \frac{\pi}{2}$

$\boxed{4}$　二次関数 $y = ax^2 - a + \sqrt{3} \cdots ①$ について、次の問に答えよ。

ただし、$a > 0$ とする

(1) 式 ① が x 軸と交点を一つだけ持つとき、式 ① と x 軸、直線 $x = -1, x = 1$ で囲まれた面積を求めよ。

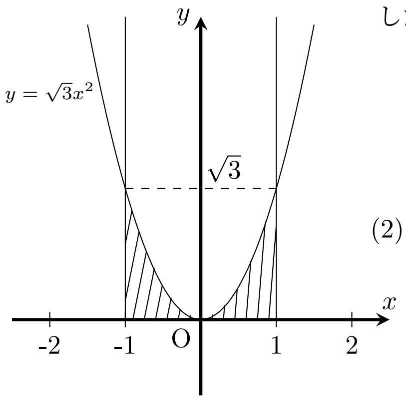
(2) 式 ① は、a の値に関わらず定点を通る。その定点を求めよ。

(3) 式 ① と円 $x^2 + y^2 = 4$ が交点を3つ持つとき、原点を含む部分の面積を求めよ。

【解答例】

(1)　$y = ax^2 - a + \sqrt{3}$ が x 軸と交点を一つだけ持つのは、式 ① が x 軸に接するとき、よって頂点が x 軸上に存在する。

したがって、$a = \sqrt{3}$ の時。また、このときグラフは以下のようになる。



したがって、求める面積は左図の斜線部分となる。

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{3}x^2dx = \int_{0}^{1}\sqrt{3}x^2dx$$

$$= 2\left[\frac{\sqrt{3}}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(2)　$y = ax^2 - a + \sqrt{3}$

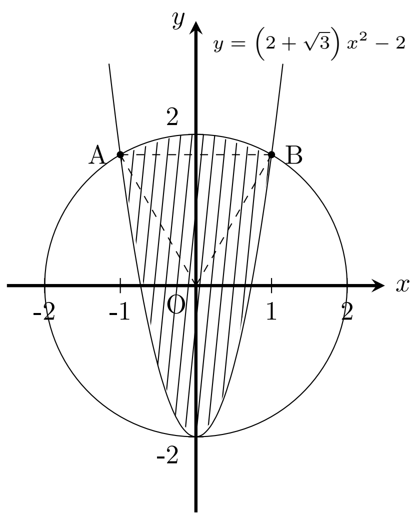
$= a\left(x^2 - 1\right) + \sqrt{3} = a(x+1)(x-1) + \sqrt{3}$ より、

$x = -1, 1$ のとき、a の値に関わらず、$y = \sqrt{3}$ となる。

したがって、$y = ax^2 - a + \sqrt{3}$ が通る定点は

$\left(-1, \sqrt{3}\right), \left(1, \sqrt{3}\right)$

(3)　$a > 0$ より、式 ① と円 $x^2 + y^2 = 4$ が交点をもつとき、以下のようになる。



式 ① が通る定点 $\left(-1, \sqrt{3}\right), \left(1, \sqrt{3}\right)$ は

どちらも円 $x^2 + y^2 = 4$ 上に存在するため、

交点を3つもつのは、

① の頂点が $(0, -2)$ で円と接するとき。

よって、　点 $(0, -2)$ を ① に代入すると

$-a + \sqrt{3} = 2$ より、$a = 2 + \sqrt{3}$

また、求める面積は左図の斜線部分となる。

ここで、点 $A\left(-1, \sqrt{3}\right)$、点 $B\left(1, \sqrt{3}\right)$ とすると

線分 AB で切断された、斜線の上部 S' は

半径2、中心角 60° の扇型から

正三角形 OAB の面積を引いたもの

であることが分かる。

よって、$S' = 2 \times 2 \times \frac{\pi}{6} - 2 \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$

したがって、求める面積 S は、

$$S = S' + \int_{-1}^{1}\left[\sqrt{3} - \left\{\left(2+\sqrt{3}\right)x^2 - 2\right\}\right]dx$$

$$= \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3} + 2\int_0^1\left\{\sqrt{3} + 2 - \left(2+\sqrt{3}\right)x^2\right\}dx$$

$$= \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3} + 2\left[\left(\sqrt{3}+2\right)x - \frac{2+\sqrt{3}}{3}x^3\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3} + 2\cdot\frac{3\left(\sqrt{3}+2\right) - 2 - \sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{2}{3}\pi + \frac{-3\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 12 - 2 - \sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{2\sqrt{3} + 2\pi + 10}{3}$$