

数列（上級）No.1-A(3)

【等比数列型の基本形： $a_{n+1} = A \cdot a_n + B$ の場合】

次の条件によって定められる数列 a_n の一般項 a_n を求めよ。

【まるたさん解説】

$$(3) \quad a_1 = 1 \quad \cdots \textcircled{1}, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

***** 【予想】 *****

$\alpha = 3\alpha + 2$ の形にしたいと予想する。

なぜか→等比数列型の $a_{n+1} - \alpha = 3(a_n - \alpha) \quad \cdots \textcircled{3}$ と予想

$$b_n = a_n - \alpha \text{ とおくと}$$

$$b_{n+1} = 3b_n \quad \cdots \textcircled{4}$$

と等比数列型の基本形にしたいから。

② - ③ で α が決まるか計算

$$a_{n+1} = 3a_n + 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$-)\underline{a_{n+1} - \alpha = 3(a_n - \alpha)} \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\alpha = 3\alpha + 2$$

$$\alpha = -1$$

これを ③ に戻してやると

$a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$ の等比数列型の基本形になる。

***** 【予想終了】 *****

【解答例】

与漸化式を変形すると

$$a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$$

(※ $b_n = a_n + 1$ としたなら、 $a_1 = 1$ より b_n は初項 2、等比 3 の等比数列)

$$a_n + 1 = 2 \cdot 3^{n-1}$$

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$$

【検算】

漸化式は、検算すれば答えが正しいかどうか分かる数少ない単元。

$n = 1, 2$ くらいは検算して確実に得点しましょう。

$n = 1$ のとき

$$a_1 = 2 \cdot 3^0 - 1 = 2 - 1 = 1 \quad \text{OK}$$

$n = 2$ のとき

$$a_2 = 2 \cdot 3^1 - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$$

② で検算すると

$$a_2 = 3a_1 + 2 = 3 \times 1 + 2 = 5 \quad \text{OK}$$